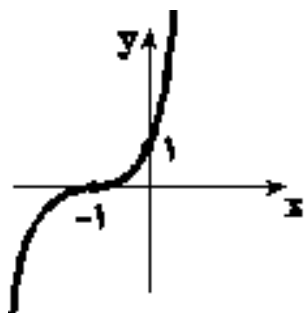




① نمودار تابع $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ به صورت مقابل می باشد، $a + b$ کدام است؟



- (۱) صفر
(۲) ۶
(۳) ۲
(۴) ۴

② نمودارهای دو تابع $f(x) = 3x - 3x^2 + x^3$ و f^{-1} ، در چند نقطه متقاطع اند؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) صفر

③ وارون تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ با دو انتقال برتابع $g(x) = -2 + \sqrt[3]{x+1}$ منطبق می شود. این دو انتقال کدام است؟

- (۱) سه واحد به چپ و سه واحد به بالا
(۲) سه واحد به راست و سه واحد به بالا
(۳) سه واحد به راست و سه واحد به پایین
(۴) در بازه $[a, b]$ ، نمودار تابع $f(x) = |x| + |x - 2|$ اکیداً یکنواخت و زیر خط $y = 4 - x$ قرار می گیرد. حاصل $b - a$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

⑤ تابع با ضابطه $f(x) = (x - 2)|x|$ در کدام نقطه به طول زیر، از صعودی به نزولی تغییر جهت می دهد؟

- (۱) ۱
(۲) صفر
(۳) -۱
(۴) وجود ندارد.

⑥ تابع $f(x) = x|x| - x$ روی بازه $[a, b]$ اکیداً نزولی است. بیشترین مقدار $f(a) - f(b)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
(۲) ۱
(۳) $\frac{1}{4}$
(۴) ۲

⑦ اگر بزرگترین بازه ای که تابع $f(x) = |x - a| - |x - b|$ در آن اکیداً نزولی است، به صورت $[-3, 5]$ باشد، دوتایی مرتب (a, b) کدام است؟

- (۱) $(3, -5)$
(۲) $(5, -3)$
(۳) $(-5, 3)$
(۴) $(-3, 5)$

۸) بزرگترین بازه‌ای که تابع با ضابطه‌ی $y = |\log(-x+1)|$ در آن اکیداً نزولی است، کدام است؟

- (۱) $[0, +\infty)$ (۲) $(-\infty, 0]$ (۳) $[0, 1)$ (۴) $(-\infty, 1]$

۹) تابع f در اعداد حقیقی اکیداً نزولی و $f(2) = 0$ است. دامنه تابع $g(x) = \sqrt{\frac{x^2}{(x-1)f(x)}}$ شامل چند عدد صحیح نامنفی است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

۱۰) اگر نمودار تابع $y = \sqrt{x-1}$ را نسبت به خط $y = x$ قرینه کرده، سپس ۳ واحد در جهت مثبت محور y ها انتقال دهیم و با ضریب ۲ در راستای افقی انبساط دهیم، نمودار حاصل با کدام طول خط $y = 8$ را قطع می‌کند؟

- (۱) ۲ (۲) -۴ (۳) ۴ (۴) -۲

۱۱) اگر نمودار تابع $f(x) = -1 + \sqrt{x+1}$ در بازه (a, b) بالاتر از نمودار تابع $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ باشد، بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲

۱۲) اگر f تابعی اکیداً نزولی با دامنه $\mathbb{R}$ باشد، دامنه تعریف $y = \sqrt{f(|x-2|) - f(|2x-1|)}$ کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R} - [-1, 1]$ (۲) $\mathbb{R} - (-1, 1)$ (۳) $(-1, 1)$ (۴) $[-1, 1]$

۱۳) اگر بزرگترین بازه‌ای را که تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & -1 < x \leq 2 \\ -3 & -4 \leq x \leq -1 \\ \sqrt{-x} & -9 \leq x < -4 \end{cases}$ در آن صعودی باشد به صورت $[a, b]$ نشان دهیم، $b - a$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۱۱

۱۴) به ازای چه مقادیری از m و n ، تابع $f(x) = \begin{cases} |x-1| - n & , x < 0 \\ mx^2 - 2 & , x \geq 0 \end{cases}$ یک تابع اکیداً نزولی است؟

- (۱) $n \geq 2, m < 0$
(۲) $n \leq 2, m > 0$
(۳) $n \leq 3, m < 0$
(۴) $n \geq 3, m > 0$

۱۵) تابع $f = \{(-1, 4m+1), (1, m^2+1), (0, 5)\}$ یک تابع صعودی است. مجموعه همه مقادیر ممکن برای m کدام است؟

- (۱) $-2 \leq m < 0$ (۲) $m \leq -2$ (۳) $-2 < m < 2$ (۴) $1 < m < 2$

۱۶) قرینه منحنی به معادله $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$ نسبت به خط $y = x$ را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم، ضابطه منحنی حاصل کدام است؟

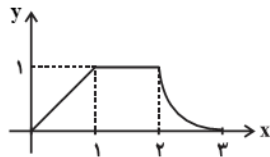
(۱) $g(x) = x^2 + 2x$

(۲) $g(x) = x^2 - 1$

(۳) $g(x) = x^2 - 2x$

(۴) $g(x) = x^2 + 1$

۱۷) اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت روبه‌رو باشد، تابع $y = -3f(-x+1)$ در کدام بازه اکیداً نزولی می‌باشد؟



(۱) $[-4, -3]$

(۲) $[-3, -2]$

(۳) $[-2, -1]$

(۴) $[1, 2]$

۱۸) اگر تابع $y = -3f(\frac{1}{x} + 1) - 6$ اکیداً نزولی باشد، تابع $y = f(-x)$ از لحاظ یکنوایی چگونه است؟

(۱) اکیداً صعودی (۲) اکیداً نزولی

(۳) ممکن است اکیداً نزولی یا کیداً نزولی (۴) غیریکنوا باشد.

۱۹) نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^3$ با دو انتقال بر نمودار تابع $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ منطبق می‌شود. در این انتقال، نقطه به طول ۲ واقع بر نمودار f به نقطه‌ای با کدام عرض بر نمودار تابع g قرار می‌گیرد؟

(۱) ۷ (۲) ۶۳ (۳) -۱ (۴) ۲۶

۲۰) تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & , x \geq 0 \\ (x-1)^3 + 4 & , x < 0 \end{cases}$ مفروض است. به ازای چند مقدار صحیح k ، معادله‌ی $f(x) = k$ دارای دو جواب است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۲

۲۱) حدود a برای آن که تابع $y = (a-4)x^2 - x$ در بازه‌ی $[2, +\infty)$ صعودی باشد، کدام است؟

(۱) $a \geq 4$ (۲) $a \geq \frac{17}{4}$ (۳) $\frac{1}{2} < a < \frac{17}{4}$ (۴) $\frac{1}{3} < a < 4$

۲۲) اگر تابع $f(x)$ تابع همانی باشد، به ازای کدام ضابطه برای $g(x)$ ، تابع $(\frac{f}{g})(x)$ در دامنه‌اش اکیداً یکنواست؟

(۱) $x - |x|$ (۲) $\frac{1}{x}$ (۳) $|x|$ (۴) $\sqrt{x}$

۴۳ حاصل عبارت $\sqrt[4]{(4 + \sqrt{7})^{-1}} \sqrt{1 + \sqrt{7}}$ کدام است؟

- ۱ (۱) $\sqrt{2}$ (۲) 2 (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt[4]{2}$

۴۴ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 4x - x^2$ را در امتداد محور x ها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات کدام است؟

- ۱ (۱) 2 (۲) $2\sqrt{5}$ (۳) $\sqrt{10}$ (۴) $2\sqrt{2}$

۴۵ تابع $f(x) = (-9 + k^2)x^3 + 5$ اکیداً نزولی است. مجموع مقادیر صحیح k ، چه قدر است؟

- ۱ (۱) صفر (۲) 1 (۳) 2 (۴) 6

۴۶ نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در امتداد محور x ها، ۱ واحد در جهت مثبت و سپس قرینه آن نسبت به محور x ها را در امتداد محور y ها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه‌های برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات، کدام است؟

- ۱ (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۳) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

۴۷ تابع f روی R اکیداً نزولی است. اگر $f(3) = 0$ باشد، دامنه $g(x) = \sqrt{x^2 f(x)}$ شامل چند عدد صحیح نامنفی است؟

- ۱ (۱) صفر (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

۴۸ تابع با ضابطه $f(x) = |x + 1| - |x - 2|$ ، در کدام بازه، اکیداً صعودی است؟

- ۱ (۱) $(-\infty, 2)$ (۲) $(-1, +\infty)$ (۳) $(-1, 2)$ (۴) $(2, +\infty)$

۴۹ اگر $f(x)$ تابع همانی باشد، به ازای کدام ضابطه برای $g(x)$ ، تابع $y = (\frac{f}{g})(x)$ در دامنه‌اش اکیداً یکنوا است؟

- ۱ (۱) $x - |x|$ (۲) $\frac{1}{x}$ (۳) $|x|$ (۴) $\sqrt{x}$

۵۰ نمودار تابع $f(x) = (x + 1)^3$ را ابتدا در راستای محور x ها با ضریب ۳ انبساط داده، سپس نسبت به محور y ها قرینه و در نهایت نمودار حاصل را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم. نمودار کدام تابع به دست می‌آید؟

- ۱ (۱) $y = -(\frac{1}{3}x + 1)^3 - 1$ (۲) $y = -(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3})^3 - 1$ (۳) $y = (-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3})^3 - 1$ (۴) $y = (-\frac{1}{3}x + 1)^3 - 1$

۵۱ برد تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2 & x \geq 0 \\ a + x & x < 0 \end{cases}$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی است، کم‌ترین مقدار a کدام است؟

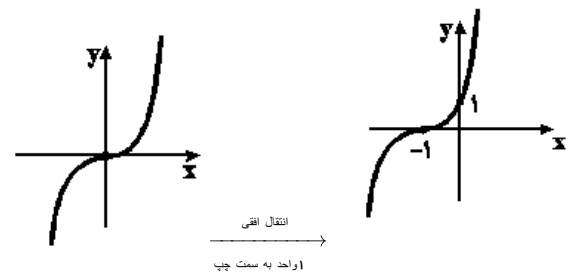
- ۱ (۱) 2 (۲) 3 (۳) -1 (۴) -2

۵۲ اگر $y = f(x)$ تابعی نزولی اکید و مثبت باشد، کدام تابع زیر الزاماً اکیداً صعودی است؟

- ۱ (۱) $\frac{-1}{f(x)}$ (۲) $\frac{1}{f(x)}$ (۳) $f^3(x)$ (۴) $\sqrt{f(x)}$

گزینه «۲»

نمودار مورد نظر، مربوط به تابع $y = (x+1)^3$ می‌باشد.



$$y = (x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

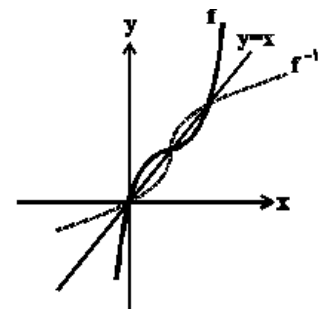
$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow a + b = 6$$

گزینه «۳»

ضابطه f را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x) = 3x - 3x^2 + x^3 = (x-1)^3 + 1$$

مطابق شکل نمودار تابع f و وارون آن در سه نقطه متقاطع هستند.



گزینه «۴»

$$f(x) = \underbrace{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}_{(x-1)^3} + 2 = (x-1)^3 + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2} + 1$$

اگر تابع $f^{-1}(x)$ را ۳ واحد به چپ و پس ۳ واحد به پائین منتقل کنیم، منطبق بر تابع $g(x)$ خواهد شد.

$$f^{-1}(x) - 3 = 1 + \sqrt[3]{x-2} \xrightarrow[\text{به چپ}]{\text{سه واحد}} y = 1 + \sqrt[3]{(x+3)-2}$$

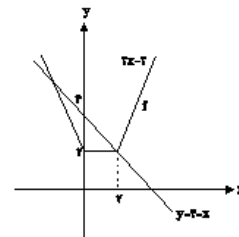
$$= 1 + \sqrt[3]{x+1} \xrightarrow[\text{پایین}]{\text{سه واحد}} y = (1 + \sqrt[3]{x+1}) - 3$$

$$\Rightarrow g(x) = -2 + \sqrt[3]{x+1}$$

گزینه «۲»

نمودار تابع f و خط داده شده را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 2-2x; & x < 0 \\ 2; & 0 \leq x < 2 \\ 2x-2; & x \geq 2 \end{cases}$$



نمودار تابع f در بازه $[-\infty, 0]$ اکیداً یکنواست که قسمتی از آن زیر خط قرار می‌گیرد، پس $b = 0$ است.

مقدار a نیز طول نقطه تلاقی ضابطه $y = 2 - 2x$ از f با خط $y = 4 - x$ است:

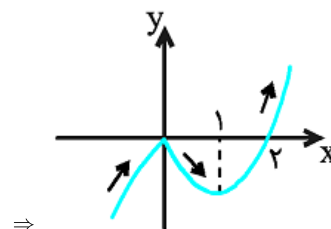
$$\Rightarrow 2 - 2a = 4 - a \Rightarrow a = -2$$

$$\Rightarrow b - a = 2$$

گزینه «۲»

نمودار تابع را رسم می‌کنیم، برای این منظور تابع را به یک تابع چندضابطه‌ای با تعیین علامت قدم‌مطلق تبدیل می‌کنیم.

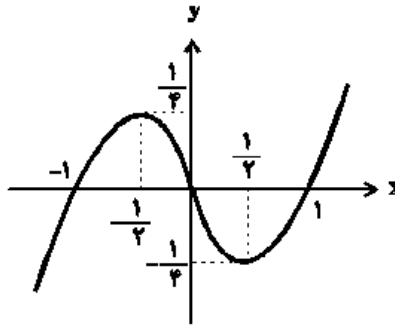
$$f(x) = \begin{cases} -x(x-2) & , \quad x < 0 \\ x(x-2) & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$


 $\Rightarrow$

با توجه به نمودار دیده می‌شود که در $x = 0$ تابع از صعودی به نزولی تغییر علامت می‌دهد.

ابتدا نمودار تابع $f(x) = x|x| - x$ را رسم می‌کنیم.

$$f(x) = x|x| - x = \begin{cases} x^2 - x; & x > 0 \\ -x - x^2; & x \leq 0 \end{cases}$$



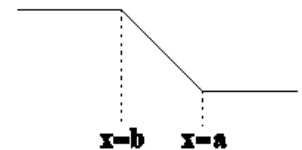
ملاحظه می‌کنید که بازه $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ بزرگترین بازه‌ای است که تابع f بر روی آن اکیداً نزولی است، پس بیشترین مقدار $f(a) - f(b)$ برابر است با:

$$f(-\frac{1}{2}) - f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - (-\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$$

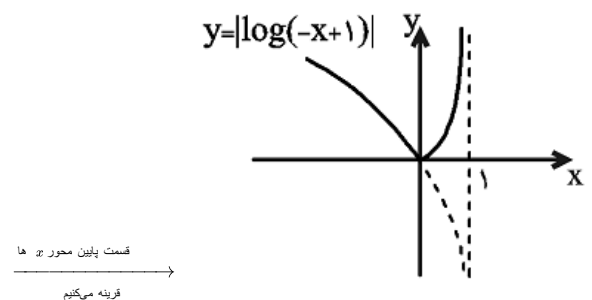
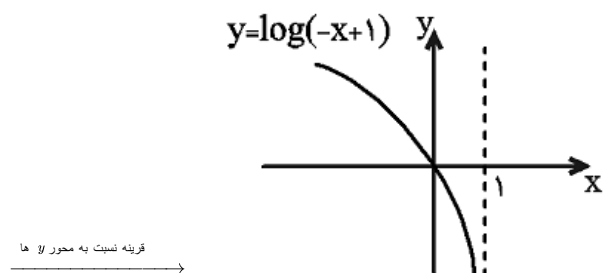
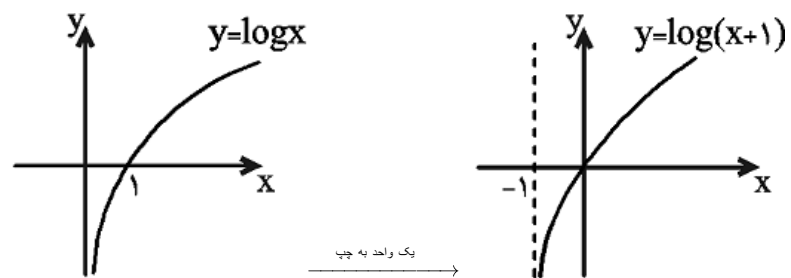
گزینه «۲»

چون تابع به صورت آبخاری یا سرسره‌ای است و قرار است نزولی باشد، پس باید $a > b$ باشد، این توابع بین ریشه‌های عبارت داخل قدرمطلق اکیداً یکنوا هستند پس ۵ و -۳ همان ریشه‌ها هستند:

$$\left. \begin{matrix} a = 5 \\ b = -3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow (a, b) = (5, -3)$$



نمودار تابع $y = |\log(-x+1)|$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، تابع در بازه‌ی $[-\infty, 0]$ اکیداً نزولی است.

سوال ۹

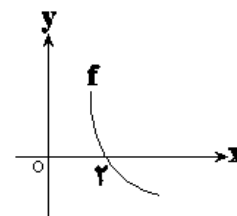
گزینه درست: ۲

قلمچی ۱۴۰۰

درصد پاسخگویی ۲۶%

متوسط

گزینه «۲»



می‌دانیم $f(۲) = ۰$ بوده و تابع f اکیداً نزولی است.

$$\frac{x^2}{(x-1)f(x)} \geq ۰$$

x	0	1	2
x^2	+	+	+
$x-1$	-	0	+
$f(x)$	+	+	0
جارت	-	+	-

دامنه تعریف تابع $D_f = \{۰, ۱, ۲\}$ است و شامل یک عدد صحیح نامنفی است.

سوال ۱۰

گزینه درست: ۳

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۳۵%

ساده

گزینه «۳»

قرینه نسبت به $y = x$ یعنی همان وارون کردن:

$$y = \sqrt{x-1}; y \geq ۰ \Rightarrow y^2 = x-1 \Rightarrow y^2 + 1 = x$$

جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$\Rightarrow y = x^2 + 1 \xrightarrow{\text{واحد به بالا}} y = x^2 + ۴; x \geq ۰$$

$$\xrightarrow{\text{تبدیل افقی}} y = \left(\frac{x}{۲}\right)^2 + ۴$$

$$y = ۸ \Rightarrow \frac{x^2}{۴} + ۴ = ۸ \Rightarrow x^2 = ۱۶$$

$$\Rightarrow x = \pm ۴ \xrightarrow{x \geq ۰} x = ۴$$

گزینه «۱»

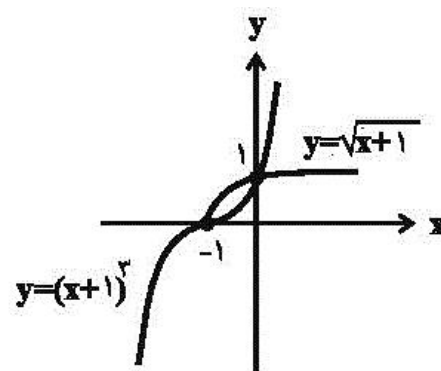
نمودار تابع f بالاتر از g است، بنابراین داریم:

$$f(x) > g(x) \Rightarrow -1 + \sqrt{x+1} > x^3 + 3x^2 + 3x$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1} > x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1} > (x+1)^3$$

با رسم نمودارهای دو تابع $y = \sqrt{x+1}$ و $y = (x+1)^3$ در یک دستگاه، می‌توانیم جواب نامعادله بالا را بیابیم:



با توجه به نمودارها، بازه موردنظر $(-1, 0)$ می‌باشد.

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow b - a = 1$$

y یک تابع رادیکالی با فرجه زوج است، پس باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد:

$$f(|x-2|) - f(|2x-1|) \geq 0 \Rightarrow f(|x-2|) \geq f(|2x-1|)$$

$$\xrightarrow{f \text{ تابعی نزولی اکید است}} |x-2| \leq |2x-1|$$

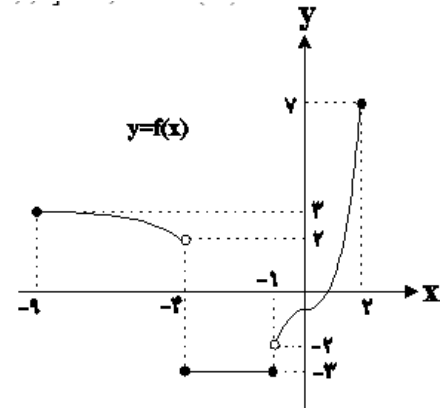
$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 - 4x + 4 \leq 4x^2 - 4x + 1 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x \leq -1 \quad \text{یا} \quad x \geq 1$$

$$\Rightarrow x \in \mathbb{R} - (-1, 1)$$

گزینه «۳»

ابتدا تابع سه ضابطه‌ای $f(x)$ را رسم می‌کنیم. با توجه به نمودار رسم شده، بزرگ‌ترین بازه‌ای که این تابع در آن صعودی است، بازه $[-4, 2]$ است، بنابراین:

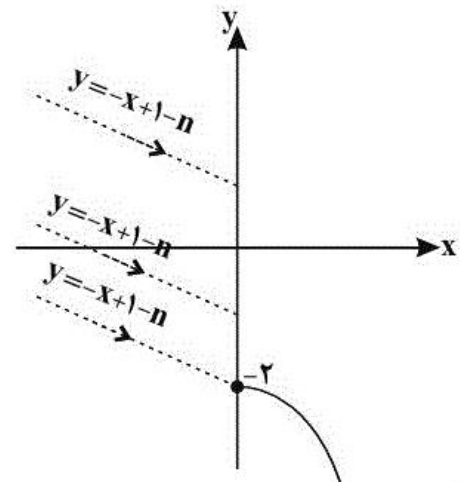
$$[a, b] = [-4, 2] \rightarrow b - a = 2 - (-4) = 6$$



گزینه «۳»

با رسم تقریبی تابع f می‌توانیم به‌خوبی آنرا بررسی کنیم. بنابراین:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 - n & , x < 0 \\ mx^2 - 2 & , x \geq 0 \end{cases}$$



برای اینکه f اکیداً نزولی باشد، باید $m < 0$ باشد و حداکثر مقدار n برابر خواهد بود با:

$$1 - 2 \geq -2 \Rightarrow -2 \geq -3 \Rightarrow n \leq 3$$

سوال ۱۵

گزینه درست: ۲

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۲۸٪

متوسط

گزینه «۲»

$$-1 < 0 < 1 \xrightarrow{f \text{ صعودی}} f(-1) \leq f(0) \leq f(1) \Rightarrow fm + 1 \leq 5 \leq m^2 + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m^2 + 1 \geq 5 \Rightarrow m^2 \geq 4 \Rightarrow m \geq 2 \text{ یا } m \leq -2 \\ fm + 1 \leq 5 \Rightarrow fm \leq 4 \Rightarrow m \leq 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} m \leq -2$$

سوال ۱۶

گزینه درست: ۲

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۱۴٪

متوسط

گزینه «۲»

قرینه یک منحنی مانند f نسبت به خط $y = x$ همان وارون تابع f است. لذا باید وارون تابع f را به دست آوریم و سپس آن را یک واحد به راست انتقال دهیم.

$$y = \sqrt{x+1} - 1 \Rightarrow y + 1 = \sqrt{x+1}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (y+1)^2 = (\sqrt{x+1})^2$$

$$\Rightarrow y^2 + 2y + 1 = x + 1 \Rightarrow x = y^2 + 2y \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 + 2x$$

حال باید $f^{-1}(x)$ را یک واحد به راست انتقال دهیم. بنابراین:

$$g(x) = f^{-1}(x-1) = (x-1)^2 + 2(x-1)$$

$$= x^2 - 2x + 1 + 2x - 2 = x^2 - 1 \Rightarrow g(x) = x^2 - 1$$

سوال ۱۷

گزینه درست: ۳

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۳۴٪

ساده

گزینه «۳»

می‌دانیم اگر تابع $y = f(x)$ اکیداً نزولی باشد، تابع $y = -f(x)$ اکیداً صعودی و تابع $y = -f(-x)$ اکیداً نزولی است.

با توجه به این نکته که انتقال‌ها و انبساط‌ها (انقباض‌ها) تغییری در یکنوایی توابع ایجاد نمی‌کنند، برای پیدا کردن بازه مورد نظر در سؤال، کافی است، بازه متناظر با بازه $[2, 3]$ را در تابع $y = -3f(1-x)$ پیدا کنیم. داریم:

$$2 \leq 1-x \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x-1 \leq -2$$

$$\Rightarrow -2 \leq x \leq -1$$

سوال ۱۸

گزینه درست: ۲

گزینه های دام دار ۱

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۲۴٪

متوسط

گزینه «۲»

در تابع $y = -3f(\frac{1}{3}x + 1) - 6$ ضرایب ۱ و $\frac{1}{3}$ و -6 در یکنوایی تابع تأثیری ندارند، اما ضریب -3 نمودار تابع را نسبت به محور x ها قرینه کرده است. بنابراین چنانچه تابع $y = -3f(\frac{1}{3}x + 1) - 6$ اکیداً نزولی باشد، تابع $y = f(x)$ حتماً اکیداً صعودی بوده است. همچنین اگر تابع $y = f(x)$ اکیداً صعودی باشد، تابع $y = f(-x)$ که قرینه تابع $y = f(x)$ نسبت به محور y ها می‌باشد، اکیداً نزولی خواهد بود.

ضابطه‌ی تابع g را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 1 = (x+1)^3 - 1$$

بنابراین اگر نمودار تابع $f(x) = x^3$ را یک واحد به چپ و سپس یک واحد به پایین انتقال دهیم، نمودار تابع $g(x) = f(x+1) - 1$ حاصل می‌شود.

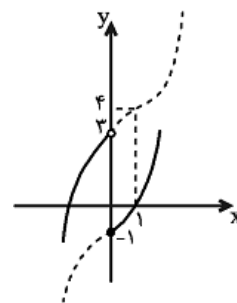
بنابراین از طول هر نقطه یک واحد کم شده و از عرض هر نقطه نیز یک واحد کم می‌شود، پس خواهیم داشت:

$$f(2) = 2^3 = 8$$

$$A(2, 8) \xrightarrow{g(x)=f(x+1)-1} A'(2-1, 8-1) = (1, 7)$$

پس نقطه‌ی $(2, 8)$ روی نمودار تابع f به نقطه‌ی $(1, 7)$ روی نمودار تابع g تبدیل می‌شود.

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم. برای رسم ضابطه‌ی بالایی، کافی است نمودار تابع $y = x^3$ را یک واحد به پایین انتقال دهیم. برای رسم ضابطه‌ی پایینی، کافی است نمودار تابع $y = x^3$ را یک واحد به راست و سپس ۴ واحد به بالا انتقال دهیم.



با توجه به نمودار، خط $y = k$ اگر k در محدوده‌ی $-1 \leq k < 3$ باشد، دو نقطه‌ی تلاقی با نمودار f خواهد داشت و در نتیجه معادله‌ی $f(x) = k$ دو جواب خواهد داشت.

پس به ازای مقادیر $2, 1, 0, -1, k$ ، معادله دو جواب دارد.

در تابع درجه‌ی دوم $y = ax^2 + bx + c$ ، اگر $a > 0$ باشد، تابع در بازه‌ی $[\frac{-b}{2a}, +\infty)$ صعودی و اگر $a < 0$ باشد، در بازه‌ی $(-\infty, \frac{-b}{2a}]$ صعودی است. بنابراین برای اینکه تابع $y = (a-4)x^2 - x$ در بازه‌ی $[2, +\infty)$ صعودی باشد، باید دو شرط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} (1) \text{ ضریب } x^2 > 0 \Rightarrow a-4 > 0 \Rightarrow a > 4 & (I) \\ (2) \frac{-b}{2a} \leq 2 \Rightarrow \frac{-(-1)}{2(a-4)} \leq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(a-4) \geq \frac{1}{2} \Rightarrow a-4 \geq \frac{1}{4} \Rightarrow a \geq \frac{17}{4} \quad (II)$$

از اشتراک (I) و (II) داریم: $a \geq \frac{17}{4}$.

گزینه «۴»

ضابطه‌ی تابع همانی به صورت $f(x) = x$ است. با توجه به هر گزینه، ضابطه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$(۱) \text{ گزینه‌ی } (\frac{f}{g})(x) = \frac{x}{x-|x|} = \begin{cases} \frac{x}{x-x} = \frac{x}{0} & , x \geq 0 \\ \frac{x}{x-(-x)} = \frac{x}{2x} & , x < 0 \end{cases}$$

تابع ثابت، اکیداً یکنوا نیست. $\Rightarrow (\frac{f}{g})(x) = \frac{1}{2} \quad , x < 0 \rightarrow$

یکنوا نیست. $\Rightarrow (\frac{f}{g})(x) = \frac{x}{\frac{1}{x}} = x^2 \quad , x \neq 0 \rightarrow$ گزینه‌ی (۲)

$$(۳) \text{ گزینه‌ی } (\frac{f}{g})(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} \frac{x}{x} & , x > 0 \\ \frac{x}{-x} & , x < 0 \end{cases}$$

تابع، اکیداً یکنوا نیست. $\Rightarrow (\frac{f}{g})(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases} \rightarrow$

اکیداً صعودی است. $(\frac{f}{g})(x) = \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \quad , x > 0$ گزینه‌ی (۴)

گزینه «۲»

$$(4 + \sqrt{4})^{-1} = \frac{1}{4 + \sqrt{4}} \times \frac{4 - \sqrt{4}}{4 - \sqrt{4}} = \frac{4 - \sqrt{4}}{16 - 4} = \frac{4 - 2\sqrt{4}}{12} = \frac{(\sqrt{4}-1)^2}{12}$$

$$\sqrt[4]{\left(\frac{\sqrt{4}-1}{12}\right)^2} = \frac{\sqrt{\sqrt{4}-1}}{\sqrt[4]{12}} \Rightarrow \frac{\sqrt{\sqrt{4}-1}}{\sqrt[4]{12}} \times \sqrt{1 + \sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{12}} = \sqrt[4]{2}$$

گزینه «۴»

$$\text{منحنی جدید} \quad |f(x+2) - (x+2)^2| = |-x^2 + 4|$$

$$4x - x^2 = -x^2 + 4 \rightarrow x = 1 \quad \text{نقطه تلاقی (۳) } OA = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

گزینه «۱»

اکیداً نزولی یعنی: $-3 < k < 3, k > 3 \Rightarrow k^2 < 9$ پس مجموع آنها صفر است.

متوسط

خارج از کشور ۱۴۰۱

گزینه درست: ۴

سوال ۲۶

گزینه «۴»

$$f(x) = \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{راست}} \frac{1}{x-1} \xrightarrow{\text{قرینه به محور } x} \frac{-1}{x-1}$$

$$\xrightarrow{\text{پایین } ۲} \frac{-1}{x-1} - ۲$$

$$\frac{1}{x} = \frac{-1}{x-1} - ۲ \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = -۲$$

$$\Rightarrow \frac{۲x-1}{x^2-x} = -۲ \Rightarrow \cancel{x}x - 1 = -۲x^{\cancel{۲}} + \cancel{x}x$$

$$\Rightarrow ۲x^{\cancel{۲}} = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{۲}}, y = \pm \sqrt{۲}$$

$$\text{مثلاً } \left(\frac{1}{\sqrt{۲}}, \sqrt{۲} \right), (۰, ۰) \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{۲} + ۲} = \sqrt{\frac{۵}{۲}} = \frac{\sqrt{۱۰}}{\sqrt{۲}}$$

ساده

خارج از کشور ۱۴۰۱

گزینه درست: ۴

سوال ۲۷

گزینه «۴»

$$x^۲ f(x) \geq ۰ \Rightarrow f(x) \geq ۰ \Rightarrow ۰, ۱, ۲, ۳ \text{ اعداد صحیح منفی}$$

۴ تا

ساده

درصد پاسخگویی ۵۵%

قلمچی ۱۴۰۰

گزینه درست: ۳

سوال ۲۸

گزینه «۳»

$$f(x) = |x+1| - |x-۲|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1-(x-۲)=۳, & x > ۲ \\ x+1+(x-۲)=۲x-1, & -1 \leq x \leq ۲ \\ -(x+1)+(x-۲)=-۳, & x < -1 \end{cases}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید در بازه $(۲, -۱)$ ، تابع f یک تابع خطی با شیب مثبت است که می‌دانیم توابع خطی با شیب مثبت اکیداً صعودی هستند.

ساده

درصد پاسخگویی ۴۳%

قلمچی ۱۴۰۰

گزینه درست: ۴

سوال ۲۹

گزینه «۴»

$$\text{اگر } g(x) = \sqrt{x} \text{ باشد: } y = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}, x > ۰$$

اکیداً صعودی است.

ساده

درصد پاسخگویی ۳۴%

قلمچی ۱۴۰۰

گزینه درست: ۴

سوال ۳۰

گزینه «۴»

$$f(x) = (x+1)^۳ \xrightarrow{\text{در راستای محور } y\text{-ها}} y = \left(\frac{1}{۳}x + 1\right)^۳$$

با ضریب 3 انبساط می‌دهیم

$$\xrightarrow{\text{نسبت به محور } y\text{-ها}} y = \left(-\frac{1}{۳}x + 1\right)^۳ \Rightarrow y = \left(-\frac{1}{۳}x + 1\right)^۳ - 1$$

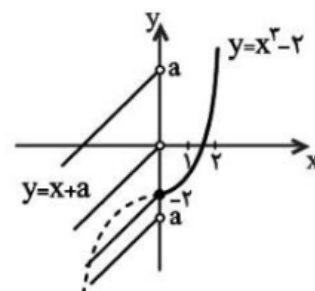
قرینه می‌کنیم

گزینه «۴»

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2 & x \geq 0 \\ x + a & x < 0 \end{cases}$$

برای رسم ضابطه‌ی بالایی تابع f ، نمودار تابع $y = x^3$ را دو واحد به پایین منتقل کرده، سپس قسمت چپ محور y ها را حذف می‌کنیم. با توجه به نمودار، برای آنکه برد تابع برابر با R شود، باید $a \geq -2$ باشد، پس کمترین مقدار a برابر با -2 است.



گزینه «۲»

تابع f اکیداً نزولی است پس اگر $x_1 < x_2$ آنگاه $f(x_1) > f(x_2)$. حال برای هر گزینه به ازای $x_1 < x_2$ ، مقادیر تابع را بررسی می‌کنیم:

(۱) $\frac{-1}{f(x)}$: گزینه‌ی

$$x_1 < x_2 \xrightarrow{f \text{ اکیداً نزولی}} f(x_1) > f(x_2)$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{f(x_1)} < \frac{1}{f(x_2)} \xrightarrow{\times (-1)} \frac{-1}{f(x_1)} > \frac{-1}{f(x_2)}$$

تابع $\frac{-1}{f}$ اکیداً نزولی است.(۲) $\frac{1}{f(x)}$: گزینه‌ی

$$x_1 < x_2 \xrightarrow{f \text{ اکیداً نزولی}} f(x_1) > f(x_2) \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{f(x_1)} < \frac{1}{f(x_2)}$$

تابع $\frac{1}{f}$ اکیداً صعودی است.(۳) $f^3(x)$: گزینه‌ی

$$x_1 < x_2 \xrightarrow{f \text{ اکیداً نزولی}} f(x_1) > f(x_2) \xrightarrow{\text{به توان ۳}} f^3(x_1) > f^3(x_2)$$

تابع f^3 اکیداً نزولی است.(۴) $\sqrt{f(x)}$: گزینه‌ی

$$x_1 < x_2 \xrightarrow{f \text{ اکیداً نزولی}} f(x_1) > f(x_2) \xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{f(x_1)} > \sqrt{f(x_2)}$$

تابع $\sqrt{f}$ اکیداً نزولی است.